

等 別：三等考試

類 科：統計

科 目：統計學

考試時間：2小時

座號：\_\_\_\_\_

※注意：(一)禁止使用電子計算器。

(二)不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在試卷上，於本試題上作答者，不予計分。

(三)本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、新北市捷運環狀線部分路段預定在 2019 年年底完工通車，目前已進入測試階段。已知新北市捷運電聯車的液壓式摩擦煞車系統的失效時間是服從具有自由度為 2 的卡方分配。今由工程師隨機抽樣測試該系統，得到一組樣本數為二之失效時間的隨機樣本，分別以  $Y_1$  與  $Y_2$  表示。

(每小題 10 分，共 40 分)

(一)令變數  $D = Y_1 - Y_2$ ，求出變數  $D$  之機率密度函數  $f(d)$ 。

(二)令變數  $S = Y_1 + Y_2$ ，求出變數  $S$  之變異數  $Var(S)$ 。

(三)令變數  $R$  為全距，求出變數  $R$  之機率密度函數  $f(r)$ 。

(四)令變數  $U = \min\{Y_1, Y_2\}$  及  $V = \max\{Y_1, Y_2\}$ ，求出機率  $P(U < 6, V > 10)$ 。

二、某經濟學者長期研究國內農民的家戶所得，發現國內的農家所得是服從平均數為  $\mu$ ，變異數為  $\sigma^2$  之常態分配。針對評估農家所得分配是否不平均的狀況，此經濟學者提出了以所得分配的第 90 百分位數和第 10 百分位數的差（以  $\theta$  表示），做為評估農家所得分配是否不平均的評估指標。今由全臺灣農家隨機抽取  $n$  筆家戶所得的資料，得到隨機樣本  $X_1, X_2, \dots, X_n$ 。令  $F(x)$  為農家所得分配之累積分配函數（cumulative distribution function）。（每小題 10 分，共 30 分）

(一)假設  $\mu$  和  $\sigma^2$  皆未知，求出上述評估指標  $\theta$  之最小變異不偏估計量（uniformly minimum variance unbiased estimator）， $\hat{\theta}$ 。

(二)假設  $\sigma^2$  已知但  $\mu$  未知，求出上述累積分配函數  $F(x)$  之不偏估計量的變異數的 Cram'er-Rao 下限（Cram'er-Rao lower bound）。

(三)假設  $\sigma^2$  已知但  $\mu$  未知，求出上述  $F(x)$  之信賴水準為  $100(1 - \alpha)\%$  的信賴區間。

三、同時丟擲三個均勻的骰子（均勻的骰子，指骰子出現每一點的機率均等）5 次，令變數  $T$  代表 5 次丟擲中三個骰子出現的點數皆不同的次數，且令變數  $W$  代表 5 次丟擲中三個骰子出現的點數皆相同的次數。

(每小題 10 分，共 30 分)

(一)求出變數  $T$  與  $W$  之聯合機率密度函數  $f(t, w)$ 。

(二)求出給定  $T = t$  之下， $W$  之條件機率密度函數  $f(w|t)$ 。

(三)求出條件變異數的期望值  $E[V(W|T)]$ 。